Prof. Dr. Alfred Toth

Zur Kombinatorik von Primfeldern

1. Bekanntlich hat eine triadisch-trichotomische Zeichenrelation die allgemeine Form

$Z = (3.x, 2.y, 1.z)$

mit $x, y, z \in (1, 2, 3)$. Setzt man ein, so bekommt man ein System von $3^3 = 27$ paarweise verschiedenen Zeichenrelationen. Nun gilt allerdings für das Teilsystem der peirceschen Zeichenklassen die Bedingung $x \leqq y \leqq z$. Dadurch werden 17 Zeichenrelationen als Nicht-Zeichenklassen herausgefiltert. Sie sind in der folgenden Tabelle mit Asterisk markiert.

(3.1, 2.1, 1.1)	*(3.1, 2.2, 1.1)	*(3.1, 2.3, 1.1)
(3.1, 2.1, 1.2)	(3.1, 2.2, 1.2)	*(3.1, 2.3, 1.2)
(3.1, 2.1, 1.3)	(3.1, 2.2, 1.3)	(3.1, 2.3, 1.3)
*(3.2, 2.1, 1.1)	*(3.2, 2.2, 1.1)	*(3.2, 2.3, 1.1)
*(3.2, 2.1, 1.2)	(3.2, 2.2, 1.2)	*(3.2, 2.3, 1.2)
*(3.2, 2.1, 1.3)	(3.2, 2.2, 1.3)	(3.2, 2.3, 1.3)
*(3.3, 2.1, 1.1)	*(3.3, 2.2, 1.1)	*(3.3, 2.3, 1.1)
*(3.3, 2.1, 1.2)	*(3.3, 2.2, 1.2)	*(3.3, 2.3, 1.2)
*(3.3, 2.1, 1.3)	*(3.3, 2.2, 1.3)	(3.3, 2.3, 1.3)

Daher wird das peircesche Zeichen von Bense (1979, S. 53) als gestufte Relation über Relationen definiert, von denen jede Trichotomie ihrer Vorgängertrichotomie höchstens gleich sein darf:

ZR (M, O, I) =
ZR (M, M=>O, M=>O.=>I) =
ZR (mon. Rel., dyad. Rel., triad. Rel.)
ZR (.1. .2. .3.) =

ZR	1.1	1.2	1.3,	1.1	1.2	1.3,	1.1	1.2	1.3
				2.1	2.2	2.3	2.1	2.2	2.3
							3.1	3.2	3.3

(3.1, 2.1, 1.3)	(3.1, 2.2, 1.3)	(3.1, 2.3, 1.3)
(3.1, 2.1, 1.2)	(3.1, 2.2, 1.2)	*(3.1, 2.3, 1.2)
(3.1, 2.1, 1.1)	*(3.1, 2.2, 1.1)	*(3.1, 2.3, 1.1)

*(3.2, 2.1, 1.3)	(3.2, 2.2, 1.3)	(3.2, 2.3, 1.3)
*(3.2, 2.1, 1.2)	(3.2, 2.2, 1.2)	*(3.2, 2.3, 1.2)
*(3.2, 2.1, 1.1)	*(3.2, 2.2, 1.1)	*(3.2, 2.3, 1.1)

*(3.3, 2.1, 1.3)	* (3.3, 2.2, 1.3)	(3.3, 2.3, 1.3)
*(3.3, 2.1, 1.2)	* (3.3, 2.2, 1.2)	*(3.3, 2.3, 1.2)
*(3.3, 2.1, 1.1)	*(3.3, 2.2, 1.1)	*(3.3, 2.3, 1.1)

Umgekehrt kann man das vollständige System aller 27 Zeichenrelationen dadurch konstruieren, daß man die 10 peirceschen Zeichenklassen auf die 17 Nicht-Zeichenklassen abbildet.

DS 1 =	(3.1, 2.1, 1.1)	→	Ø	
DS 2 =	(3.1, 2.1, 1.2)	→	Ø	
DS 3 =	(3.1, 2.1, 1.3)	→	Ø	
			DS 4 =	(3.1, 2.2, 1.1)
DS 5 =	(3.1, 2.2, 1.2)	→	Ø	
DS 6 =	(3.1, 2.2, 1.3)	→	Ø	
			DS 7 =	(3.1, 2.3, 1.1)
			DS 8 =	(3.1, 2.3, 1.2)
DS 9 =	(3.1, 2.3, 1.3)	→	Ø	

			DS 10 =	(3.2, 2.1, 1.1)
			DS 11 =	(3.2, 2.1, 1.2)
			DS 12 =	(3.2, 2.1, 1.3)

		DS 13 = (3.2, 2.2, 1.1)
DS 14 = (3.2, 2.2, 1.2)	→	Ø
DS 15 = (3.2, 2.2, 1.3)	→	Ø
		DS 16 = (3.2, 2.3, 1.1)
		DS 17 = (3.2, 2.3, 1.2)
DS 18 = (3.2, 2.3, 1.3)	→	Ø

		DS 19 = (3.3, 2.1, 1.1)
		DS 20 = (3.3, 2.1, 1.2)
		DS 21 = (3.3, 2.1, 1.3)
		DS 22 = (3.3, 2.2, 1.1)
		DS 23 = (3.3, 2.2, 1.2)
		DS 24 = (3.3, 2.2, 1.3)
		DS 25 = (3.3, 2.3, 1.1)
		DS 26 = (3.3, 2.3, 1.2)
DS 27 = (3.3, 2.3, 1.3)	→	Ø

2. Das System der 17 Nicht-Zeichenklassen wird hier also als ein System mit als Platzhalter dienenden Leerstellen definiert. Bemerkenswert ist, daß die Nummern der 10 abzubildenden peirceschen Zeichenklassen der OEIS-Folge A073216 entsprechen:

```
n such that 3 is the largest power of 3 dividing binomial(3n,n)
```

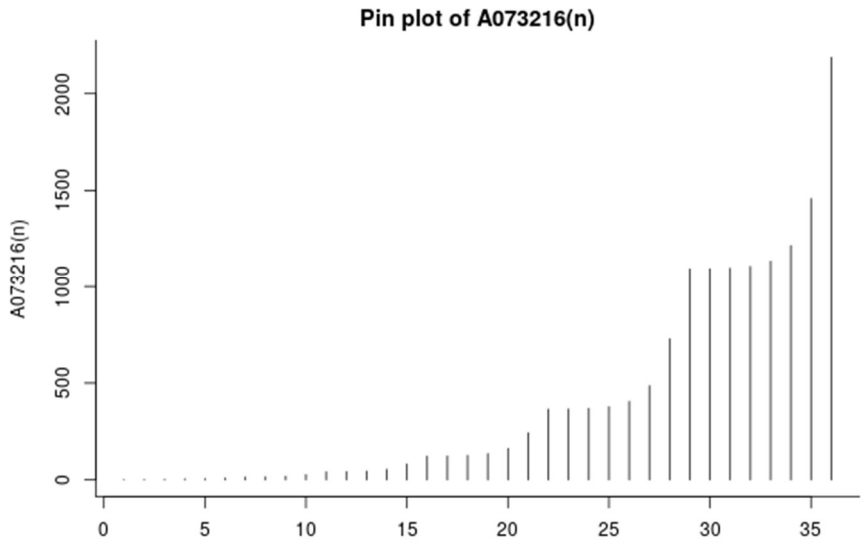
1, 2, 3, 5, 6, 9, 14, 15, 18, 27, 41, 42, 45, 54, 81, 122, 123, 126, 135, 162, 243, 365, 366, 369, 378, 405, 486, 729, 1094, 1095, 1098, 1107, 1134, 1215, 1458, 2187

die ebenfalls als Koeffizienten von Drinfeld modularen Formen auftauchen (vgl. Armana 2011):

$q = 3,\ d \leqslant 4.$

i	$b_i(h)$
1	0
2	-1
3	$[1]$
5	$-[1]$
6	$-[1]^2 - 1$
9	$[2] = [1]^3 + [1]$
14	$[1]^4 - 1$
15	$[1]^5 - [1]^3 + [1]$
18	$-[1]^6 + [1]^4 - [1]^2 - 1$
27	$[3] = [1]^9 + [1]^3 + [1]$
41	$-[1]^{13} + [1]^9 - [1]^7 - [1]$
42	$-[1]^{14} + [1]^{12} - [1]^{10} - [1]^8 - [1]^2 - 1$
45	$[1]^{15} - [1]^{13} + [1]^{11} - [1]^9 + [1]^3 + [1]$
54	$-[1]^{18} + [1]^{12} + [1]^{10} - [1]^6 + [1]^4 - [1]^2 - 1$
81	$[4] = [1]^{27} + [1]^9 + [1]^3 + [1]$

Als Graph dargestellt:



Allerdings entspricht die komplementäre Folge

4, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

keiner OEIS-Folge. Man diese komplementären Koeffizienten jedoch dazu benutzen, um den Anteil von Nicht-Zeichenklassen an den 9 in Toth (2021a) definierten Primfeldern aufzeigen:

1. Primfeld

DS 1 =	(3.1, 2.1, 1.1)	×	(1.1 ← <u>1.2, 1.3</u>)	M-them. M
DS 2 =	(3.1, 2.1, 1.2)	×	(2.1 ← <u>1.2, 1.3</u>)	M-them. O
DS 3 =	(3.1, 2.1, 1.3)	×	(3.1 ← <u>1.2, 1.3</u>)	M-them. I

2. Primfeld

*DS 4 =	(3.1, 2.2, 1.1)	×	(<u>1.1</u> → 2.2 ← <u>1.3</u>)	M-them. O
DS 5 =	(3.1, 2.2, 1.2)	×	(<u>2.1, 2.2</u> → 1.3)	O-them. M
DS 6 =	(3.1, 2.2, 1.3)	×	(<u>3.1</u> ↔ <u>2.2</u> ↔ <u>1.3</u>)	triad. Them.

3. Primfeld

*DS 7 =	(3.1, 2.3, 1.1)	×	(<u>1.1</u> → 3.2 ← <u>1.3</u>)	M-them. I
*DS 8 =	(3.1, 2.3, 1.2)	×	(<u>2.1</u> ↔ <u>3.2</u> ↔ <u>1.3</u>)	triad. Them.
DS 9 =	(3.1, 2.3, 1.3)	×	(<u>3.1, 3.2</u> → 1.3)	I-them. M

4. Primfeld

*DS 10 =	(3.2, 2.1, 1.1)	×	(<u>1.1, 1.2</u> → 2.3)	M-them. O
*DS 11 =	(3.2, 2.1, 1.2)	×	(<u>2.1</u> →1.2 ← <u>2.3</u>)	O-them. M
*DS 12 =	(3.2, 2.1, 1.3)	×	(<u>3.1</u> ↔ <u>1.2</u> ↔ <u>2.3</u>)	triad. Them.

5. Primfeld

*DS 13 =	(3.2, 2.2, 1.1)	×	(1.1 ← <u>2.2, 2.3</u>)	O-them. M
DS 14 =	(3.2, 2.2, 1.2)	×	(2.1 ← <u>2.2, 2.3</u>)	O-them. O
DS 15 =	(3.2, 2.2, 1.3)	×	(3.1 ← <u>2.2, 2.3</u>)	O-them. I

6. Primfeld

*DS 16 =	(3.2, 2.3, 1.1)	×	(<u>1.1</u> ↔ <u>3.2</u> ↔ <u>2.3</u>)	triad. Them.
*DS 17 =	(3.2, 2.3, 1.2)	×	(<u>2.1</u> → 3.2 ← <u>2.3</u>)	O-them. I
DS 18 =	(3.2, 2.3, 1.3)	×	(<u>3.1, 3.2</u> → 2.3)	I-them. O

7. Primfeld

*DS 19 =	(3.3, 2.1, 1.1)	×	(<u>1.1, 1.2</u> → 3.3)	M-them. I
*DS 20 =	(3.3, 2.1, 1.2)	×	(<u>2.1</u> ↔ <u>1.2</u> ↔ <u>3.3</u>)	triad. Them.

*DS 21 = (3.3, 2.1, 1.3) × ($\underline{3.1}$ → 1.2 ← $\underline{3.3}$) I-them. M

8. Primfeld

*DS 22 = (3.3, 2.2, 1.1) × ($\underline{1.1}$ ↔ $\underline{2.2}$ ↔ $\underline{3.3}$) triad. Them.

*DS 23 = (3.3, 2.2, 1.2) × ($\underline{2.1, 2.2}$ → 3.3) O-them. I

*DS 24 = (3.3, 2.2, 1.3) × ($\underline{3.1}$ → 2.2 ← $\underline{3.3}$) I-them. O

9. Primfeld

*DS 25 = (3.3, 2.3, 1.1) × (1.1 ← $\underline{3.2, 3.3}$) I-them. M

*DS 26 = (3.3, 2.3, 1.2) × (2.1 ← $\underline{3.2, 3.3}$) I-them. O

DS 27 = (3.3, 2.3, 1.3) × (3.1 ← $\underline{3.2, 3.3}$) I-them. I

Wie man sofort erkennt, ist nur das 1. Primfeld ausschließlich aus peirceschen Zeichenklassen zusammengesetzt. Die übrigen Primfelder enthalten 1, 2 oder sogar 3 Nicht-Zeichenklassen. Primfelder sind demnach genau die Tripel der Form $T_1 = (1, 2, 3)$ und $N(T_1 = (1, 2, 3))$, d.h. $\sum (T_1, \ldots, T_{27})$.

Allerdings sind dies nicht die einzigen Primfelder, denn die 6 triadischen Thematisationen stellen ja jeweils Tripel von vollständigen (Z = M, O, I)-Thematisationen dar:

DS 6 = (3.1, 2.2, 1.3) × ($\underline{3.1}$ ↔ $\underline{2.2}$ ↔ $\underline{1.3}$) triad. Them.

(3.1, 2.2-them. 1.3 I/O-them. M)

(3.1, 1.3-them. 2.2 I/M-them. O)

(2.2, 1.3-them. 3.1 O/M-them. I)

DS 8 = (3.1, 2.3, 1.2) × ($\underline{2.1}$ ↔ $\underline{3.2}$ ↔ $\underline{1.3}$) triad. Them.

(3.2, 2.1-them. 1.3 I/O-them. M)

(3.2, 1.3-them. 2.1 I/M-them. O)

(2.1, 1.3-them. 3.2 O/M-them. I)

DS 12 = (3.2, 2.1, 1.3) × ($\underline{3.1}$ ↔ $\underline{1.2}$ ↔ $\underline{2.3}$) triad. Them.

(3.1, 2.3-them. 1.2 I/O-them. M)

(3.1, 1.2-them. 2.3 I/M-them. O)

(2.3, 1.2-them. 3.1 O/M-them. I)

DS 16 = (3.2, 2.3, 1.1) × (<u>1.1</u> ↔ <u>3.2</u> ↔ <u>2.3</u>) triad. Them.

(3.2, 2.3-them. 1.1 I/O-them. M)

(3.2, 1.1-them. 2.3 I/M-them. O)

(2.3, 1.1-them. 3.2 O/M-them. I)

DS 20 = (3.3, 2.1, 1.2) × (<u>2.1</u> ↔ <u>1.2</u> ↔ <u>3.3</u>) triad. Them.

(3.3, 2.1-them. 1.2 I/O-them. M)

(3.3, 1.2-them. 2.1 I/M-them. O)

(2.1, 1.2-them. 3.3 O/M-them. I)

DS 22 = (3.3, 2.2, 1.1) × (<u>1.1</u> ↔ <u>2.2</u> ↔ <u>3.3</u>) triad. Them.

(3.3, 2.2-them. 1.1 I/O-them. M)

(3.3, 1.1-them. 2.2 I/M-them. O)

(2.2, 1.1-them. 3.3 O/M-them. I)

Zusammen mit den dyadischen M-, O-, oder I-Thematisationen gibt es also pro Zeichenbezug 7 + 6 = 13 Thematisationen:

M:

1, 5, 9, 11, 13, 21, 25 | 6, 8, 12, 16, 20, 22

O:

2, 4, 10, 14, 18, 24, 26 | 6, 8, 12, 16, 20, 22

I:

3, 7, 15, 17, 19, 23, 27 | 6, 8, 12, 16, 20, 22,

die somit zu $13^3 = 2197$ trichotomischen Triaden kombiniert werden können, die gemäß Voraussetzung (vgl. Toth 2021b) alle prim sind, z.B.

DS 1 =	(3.1, 2.1, 1.1)	×	(1.1 ← <u>1.2, 1.3</u>)	M-them. M
DS 10 =	(3.2, 2.1, 1.1)	×	(<u>1.1, 1.2</u> → 2.3)	M-them. O
DS 23 =	(3.3, 2.2, 1.2)	×	(<u>2.1, 2.2</u> → 3.3)	O-them. I

DS 8 =	(3.1, 2.3, 1.2)	×	(<u>2.1</u> ↔ <u>3.2</u> ↔ <u>1.3</u>)	triad. Them.
DS 20 =	(3.3, 2.1, 1.2)	×	(<u>2.1</u> ↔ <u>1.2</u> ↔ <u>3.3</u>)	triad. Them.
DS 22 =	(3.3, 2.2, 1.1)	×	(<u>1.1</u> ↔ <u>2.2</u> ↔ <u>3.3</u>)	triad. Them.

Literatur

Armana, Cécile, Coefficients of Drinfeld modular forms and Hecke operators. In: Journal of Number Theory 131, 2011, S. 1435-1460

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Von Primzeichen zu Primfeldern. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2021a

Toth, Alfred, Von Primzeichen aufgespannte Primfelder. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2021b

13.6.2021